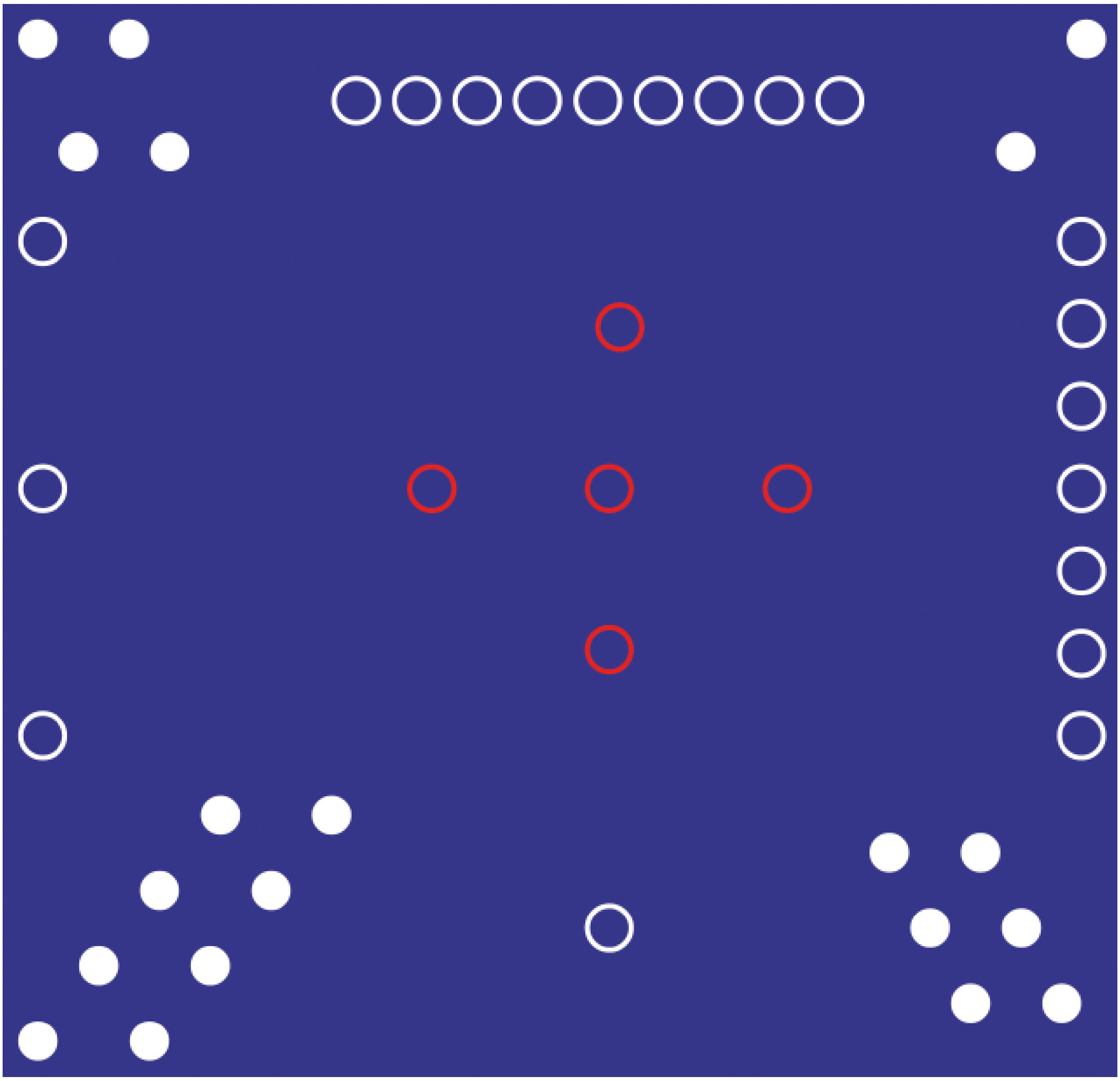
# Magische Quadrate

Ein magisches Quadrat der Ordnung 3 (4; 5; … n) ist ein Quadrat mit 3 (4; 5; … n) Zeilen und ebenso vielen Spalten, in dem die Zahlen 1 bis 9 (16; 25; … $n^2$) derart angeordnet sind, dass sich in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale die gleiche Summe (= magische Zahl) ergibt.

## Ein berühmtes magisches Quadrat der Ordnung 3 – Lo Shu

Das Lo Shu-Quadrat ist das älteste bekannte magische Quadrat. Der chinesischen Überlieferung nach tauchte vor ca. 4000 Jahren eine Schildkröte aus dem Fluss Lo auf, die auf ihrem Rücken eine Darstellung der Zahlen von 1 – 9 in folgender Anordnung trug.



Ersetzt man die Punkte durch Zahlen, so erhält man folgendes Quadrat:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Zeilensummen

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | + 9 | + 2 | = 15 |
| 3 | + 5 | + 7 | = 15 |
| 8 | + 1 | + 6 | = 15 |

Spaltensummen

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| +3 | + 5 | + 7 |
| +8 | + 1 | + 6 |
| = 15 | = 15 | = 15 |

Diagonalensummen

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | | | |
| | + 5 | | |
| | | + 6 | |
| | | | = 15 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | = 15 |
| | | + 2 | |
| | + 5 | | |
| 8 | | | |

## *Warum muss die magische Zahl 15 sein?*

Summe der Zahlen von 1 bis 9:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9

= (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) + 9

= 5 · 9 = 45

Da das Quadrat magisch ist, muss sich in jeder der drei Zeilen (Spalten) die gleiche Summe ergeben. Zeilensumme = Spaltensumme = 45 : 3 = **15**.

---

Formeln für Experten:

- Summe der Zahlen von 1 bis $3^2$

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9=\frac{1}{2}\cdot(3^2+1)\cdot 3^2=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot(3^2+1)$$

- Magische Zahl für ein Quadrat der Ordnung 3

$$(\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot(3^2+1)):3=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3^2+1)$$

- Magische Zahl für ein Quadrat der Ordnung n

$$(\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot(n^2+1)):n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n^2+1)$$

---

## Zur Magie des Lo Shu-Quadrates:

Es gibt 362 880 Möglichkeiten die Zahlen von 1 – 9 in einem Quadrat anzuordnen aber nur 8 der Quadrate sind magisch.

### *Warum sind es 362 880 Möglichkeiten, die Zahlen von 1 – 9 in einem Quadrat anzuordnen?*

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

Die Position A kann mit jeder der Zahlen von 1 bis 9 besetzt werden. Damit gibt es 9 verschiedene Möglichkeiten.
Zu jeder der Besetzungen von Position A gibt es jeweils 8 Möglichkeiten, Position B zu besetzen. Hat man z.B. im ersten Feld die 1 gewählt, so verbleiben für das 2. Feld noch die Zahlen von 2 bis 9. Für die ersten beiden Felder gibt es also insgesamt $9 \cdot 8 = 72$ Möglichkeiten, sie mit zwei verschiedenen Zahlen von 1 bis 9 zu besetzen.
Zu jeder Kombination der ersten beiden Positionen A und B gibt es jeweils 7 Auswahlmöglichkeiten für Position C. Hat man z.B. für A die Zahl 1, für B die Zahl 2 gewählt so kann man für C nur noch unter den sieben Zahlen von 3 bis 9 auswählen.
Insgesamt gibt es demnach:
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$ Möglichkeiten, die Zahlen von 1 bis 9 in einem Quadrat anzuordnen.

### *Wie erklärt sich die Verteilung der Zahlen 1 – 9 im Lo Shu-Quadrat und warum gibt es nur acht verschiedene magische Quadrate?*

„Magische Summen"
Für die Bildung der Summe 15 aus je drei der Zahlen 1 – 9 gibt es genau 8 Möglichkeiten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 + 5 + 1 | 8 + 6 + 1 | 7 + 6 + 2 | 6 + 5 + 4 |
| 9 + 4 + 2 | 8 + 5 + 2 | 7 + 5 + 3 | |
| | 8 + 4 + 3 | | |

In diesen Summen kommen die Zahlen 1 – 9 unterschiedlich oft vor. Die Zahl 2 findet man z.B. in drei, die Zahl 5 hingegen in 4 der 8 Summen.

| Zahl | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Absolute Häufigkeit | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 |

- Die geraden Zahlen kommen jeweils genau dreimal,
- die ungeraden Zahlen -außer der 5- jeweils genau zweimal und
- die Zahl 5 genau viermal vor.

<u>Ecken, Seitenmitten und Zentrum – Summenbildung</u>

Das Quadrat hat 3 Zeilen, 3 Spalten und 2 Diagonalen, also insgesamt 8 Tripel, deren Summe 15 ergeben soll.

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

- A + B + C = 15; D + E + F = 15; G + H + I = 15
- A + D + G = 15; B + E + H = 15, C + F + I = 15
- A + E + I = 15; G + E + C = 15.

Zuordnung:

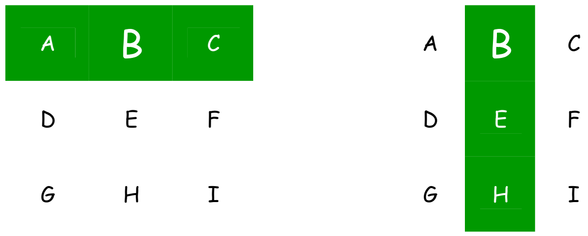
Jede <u>Ecke</u>, z.B. A kommt in genau einer Zeilen-, in genau einer Spalten- und genau einer Diagonalensumme (also in genau drei der 8 Summen) vor.

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

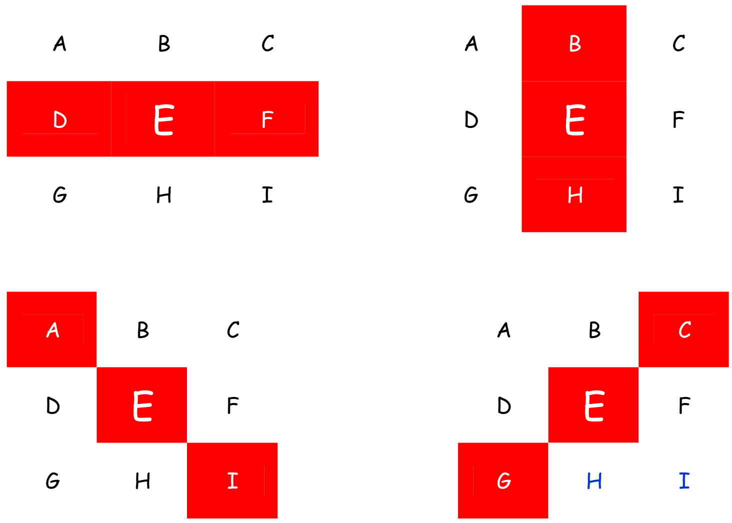
| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

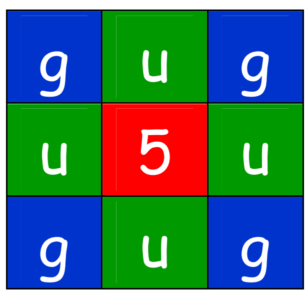
Jede Seitenmitte, z.B. B kommt in genau einer Zeilen- und in genau einer Spaltensumme (also in genau zwei der 8 Summen) vor.




Das Zentrum E des Quadrates kommt in der Summe der zweiten Zeile, der Summe der zweiten Spalte und jeder Summe der beiden Diagonalen (also in genau vier der 8 Summen) vor.




Zuordnung  Ecken, Seitenmitten und Zentrum zu den Zahlen 1 – 9
Die Zahl 5 ist die einzige Zahl, die in vier verschiedenen Summen vorkommt. Das Gleiche gilt für das Zentrum E. Also muss gelten: E = 5.
Da jede Ecke in drei verschiedenen Summen vorkommt, muss die Ecke mit einer geraden Zahl besetzt werden. Die ungeraden Zahlen bilden die Seitenmitten.




Mögliche Kombinationen dreigliedriger Summen für die Diagonalen:

8 + 5 + 2   //   6 + 5 + 4

4  Möglichkeiten für erste Diagonale:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | 5 | |
| | | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | |
| | 5 | |
| | | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | | |
| | 5 | |
| | | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | |
| | 5 | |
| | | 6 |

Zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es jeweils 2 Alternativen, die 2. Diagonale zu besetzen:

Bsp.:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | 2 |
| | 5 | |
| 8 | | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | 8 |
| | 5 | |
| 2 | | 6 |

Da die magische Zahl 15 beträgt, ist der Rest nun jeweils fix, so dass es genau 8 Möglichkeiten gibt, die Zahlen von 1 – 9 so zu einem Quadrat anzuordnen, dass es magisch ist.

Bsp.:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

---

**Und jetzt bist DU dran!**

- Schreibe alle 8 magischen Quadrate der Ordnung 3 auf.
- Oben siehst du das Lo Shu-Quadrat, eines der 8 möglichen magischen Quadrate der Ordnung 3.
- Zeige, dass sich jedes der anderen 7 Quadrate durch
  - Drehung oder
  - Spiegelung oder
  - Spiegelung mit anschließender Drehung

  aus dem Lo Shu-Quadrat erzeugen lässt.

---